

A szögfelező egyenletéhez

Az [1] internetes anyagban találkoztunk a *biszektrix* – azaz a szögfelező – egyenes egyenletének egyik képletével – 1. ábra. Most ezt vezetjük le.

Уравнения биссектрис [[правильно](#) | [правильно код](#)]

- Если две смежные стороны треугольника записаны уравнениями $y_1 = a_1 x + b_1$ и $y_2 = a_2 x + b_2$, то в явном виде биссектрисы представимы в виде функций [[1] [↗](#)]:

$$y = \frac{a_1 \sqrt{a_2^2 + 1} \pm a_2 \sqrt{a_1^2 + 1}}{\sqrt{a_2^2 + 1} \pm \sqrt{a_1^2 + 1}} x + \frac{b_1 \sqrt{a_2^2 + 1} \pm b_2 \sqrt{a_1^2 + 1}}{\sqrt{a_2^2 + 1} \pm \sqrt{a_1^2 + 1}}$$

1. ábra – forrása: [1]

A feladat

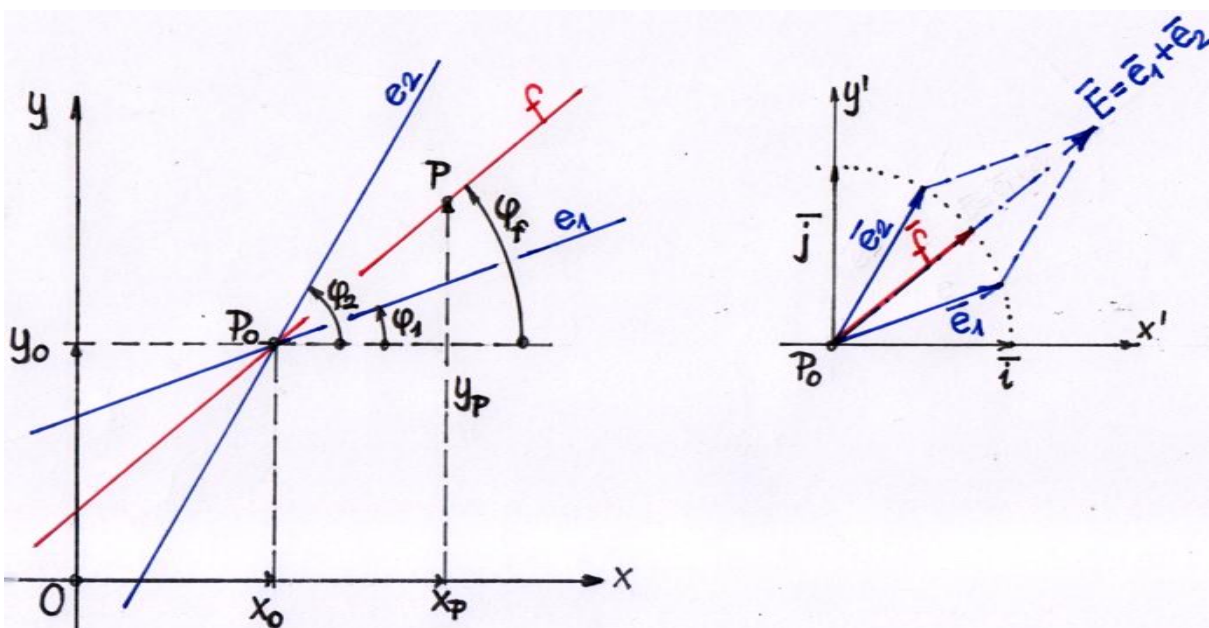
Adott egy háromszög két szomszédos oldalának egyenlete:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1, \quad y_2 = a_2 \cdot x + b_2.$$

Írjuk fel a szögfelező egyenes $y = y(x)$ alakú egyenletét!

A megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ egyenesek egyenlete:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1, \quad (1/1)$$

$$y_2 = a_2 \cdot x + b_2. \quad (1/2)$$

A két egyenes $\mathbf{P}_0$ metszéspontjára (1) -ből:

$$y_{1,0} = y_{2,0} \rightarrow a_1 \cdot x_0 + b_1 = a_2 \cdot x_0 + b_2 \rightarrow x_0 \cdot (a_1 - a_2) = b_2 - b_1, \text{ innen:}$$

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}; \quad (2/1)$$

$$y_0 = y_{1,0} = a_1 \cdot x_0 + b_1 = a_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 = \frac{a_1 \cdot (b_2 - b_1) + b_1 \cdot (a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2}{a_1 - a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2}{a_1 - a_2}, \text{ tehát:}$$

$$y_0 = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2}. \quad (2/2)$$

Az f szögfelező egyenes egy $\mathbf{P}$ pontjára:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{y_P - y_0}{x_P - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow \underline{y = y_0 + \operatorname{tg} \varphi_f \cdot (x - x_0)}. \quad (3)$$

A következő feladat $\operatorname{tg} \varphi_f$ kifejezésének előállítására. A 2. ábra alapján az egyenesek egységvektorai:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \varphi_1 \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi_1 \cdot \mathbf{j}, \quad (4/1)$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos \varphi_2 \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi_2 \cdot \mathbf{j}, \quad (4/2)$$

a szögfelező egyenesének egységvektora:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2|} = \frac{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \cdot \mathbf{i} + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cdot \mathbf{j}}{\sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2}}; \quad (5)$$

ismét a 2. ábra alapján, (5) - tel is:

$$\cos \varphi_f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{i} = \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2}}, \quad (6)$$

$$\sin \varphi_f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2}}, \quad (7)$$

majd (6) és (7) - tel:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\sin \varphi_f}{\cos \varphi_f} = \frac{\frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2}}}{\frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2}}} = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}}. \quad (8)$$

Most felhasználjuk, hogy:

$$\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (9)$$

Majd (8) és (9) - cel:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\frac{\pm \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}} + \frac{\pm \operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2}}}{\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}} + \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2}}} = \frac{\frac{(\pm \operatorname{tg} \varphi_1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} + (\pm \operatorname{tg} \varphi_2) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2}}}{\frac{(\pm 1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} + (\pm 1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2}}}, \quad \text{innen:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{(\pm \operatorname{tg} \varphi_1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} + (\pm \operatorname{tg} \varphi_2) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{(\pm 1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} + (\pm 1) \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}. \quad (10 / 1)$$

A (10) képletben dönteni kell az előjelekről. Ehhez végig kell venni, hogy melyik sík - negyedben hogyan alakul a **sin**, a **cos** és a **tg** szögfüggvény előjele, mindkét egyenesre. Ennek eredménye:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} \pm \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_2} \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1}}. \quad (10 / 2)$$

Ezután emlékeztetünk arra, hogy az egyenesek iránytangensei:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = a_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = a_2. \quad (11)$$

Most (10 / 2) és (11) - gyel:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}}. \quad (12)$$

Majd (3) - mal:

$$y = y_0 + \operatorname{tg} \varphi_f \cdot (x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi_f \cdot x + (y_0 - \operatorname{tg} \varphi_f \cdot x_0). \quad (13)$$

Ezután (2 / 1), (2 / 2), (12) és (13) - mal:

$$y = \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \cdot x + \left(\frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2} - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right). \quad (14)$$

A (14) képlet zárójeles (Z) tagjának átalakítása:

$$Z = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2} - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2};$$

$$Z = \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot \left[a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 - (b_2 - b_1) \cdot \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \right],$$

$$Z = \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot \left[b_2 \cdot \left(a_1 - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \right) - b_1 \cdot \left(a_2 - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \right) \right]; \quad (15)$$

a szögletes zárójelen belüli első (z_1) zárójeles tényező:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_1 \cdot \sqrt{1+a_1^2} - a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \mp a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = \\ &= \frac{\pm a_1 \cdot \sqrt{1+a_1^2} \mp a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = (a_1 - a_2) \cdot \frac{\pm \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}}; \end{aligned} \quad (16)$$

a szögletes zárójelen belüli második (z_2) zárójeles tényező:

$$\begin{aligned} z_2 &= a_2 - \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = \frac{a_2 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2} - a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \mp a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = \\ &= \frac{a_2 \cdot \sqrt{1+a_2^2} - a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} = (a_2 - a_1) \cdot \frac{\sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}}; \end{aligned} \quad (17)$$

most (15), (16), (17) - tel:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{a_1 - a_2} \cdot \left[b_2 \cdot (a_1 - a_2) \cdot \frac{\pm \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} - b_1 \cdot (a_2 - a_1) \cdot \frac{\sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \right] = \\ &= \left[b_2 \cdot \frac{\pm \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} + b_1 \cdot \frac{\sqrt{1+a_2^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \right] = \frac{b_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm b_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}}; \end{aligned} \quad (18)$$

ezután (14) és (18) - cal:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{a_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm a_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}} \cdot x + \frac{b_1 \cdot \sqrt{1+a_2^2} \pm b_2 \cdot \sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{1+a_2^2} \pm \sqrt{1+a_1^2}}.}} \quad (19)$$

A (19) képlet megegyezik az 1. ábrán látható megfelelőjével, a gyök alatti összeadandók sorrendjétől eltekintve. Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Eddig még nem találkoztunk a (19) képlettel. Meglepő a szimmetriája.

M2. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó gondolja végig a (10 / 1) képletről a (10 / 2) képletre való áttérést. Ez egy hosszadalmas és sok figyelmet igénylő folyamat lehet.

M3. A (8) képletből, két trigonometriai azonossággal:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \rightarrow \underline{\varphi_f = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}, \quad (20)$$

a szemlélettel egyezően; ugyanis a 2. ábra szerint is:

$$\varphi_f = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

M4. Ha valaki idegenkedik a (19) alakú képletektől, akkor ajánlatos összeállítania a saját maga számára kellemes(ebb) képleteket. Több egyenértékű képlet írható fel itt is.

Például (11) és (20) szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi_f = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{arctg}(a_1) + \operatorname{arctg}(a_2)}{2} \right], \quad (21)$$

majd (2), (3) szerint:

$$y(x) = y_0 + \operatorname{tg} \varphi_f \cdot (x - x_0), \quad y_0 = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2}, \quad x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}; \quad (22)$$

ezután (21) és (22) - vel:

$$\boxed{y(x) = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2} + \left(x - \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{arctg}(a_1) + \operatorname{arctg}(a_2)}{2} \right]}. \quad (23)$$

Nekünk (23) jobban tetszik, mint (19): egyszerűbb a szerkezete, könnyebb a levezetése és az alkalmazása.

A 2. ábra jobb oldali részén feltüntetett $P_0 x' y'$ k. r. - ben $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, így ekkor (23) - ből:

$$y'(x') = x' \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{arctg}(a_1) + \operatorname{arctg}(a_2)}{2} \right]. \quad (24)$$

Vagy másként (22) - ből:

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi_f \cdot (x - x_0), \quad y' = y - y_0, \quad x' = x - x_0, \quad (25)$$

így (21) és (25) - ből:

$$y'(x') = \operatorname{tg} \varphi_f \cdot x' = x' \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{arctg}(a_1) + \operatorname{arctg}(a_2)}{2} \right]. \quad (24')$$

M5. Az ismertnek vett képletek megtalálhatók például [2] - ben is.

M6. A képleteket sokan nem szeretik, finoman fogalmazva. Náluk fel sem merül, hogy melyik képlet a jobb és / vagy szebb. Meglehet, kellene. Ha annak idején nem hanyagolták

volna a matekot, akkor talán nem menekülnének sikítva egy (23) - hoz hasonló optikai csapás elől. Igaz, ami igaz: nem mindenkinek adatik meg egy jó tanár segítségével. Viszont az is igaz, hogy „jó kifogás sose rossz”.

Elképesztő, hogy milyen gyakoriak az internetes segélykérések: „Tudna segíteni valaki?” Egy ilyen látható a 3. ábrán. Feladója valószínűleg nem sok képletet látott / írt le még.

Tudnátok nekem segíteni ebben a matematikai algebrai kifejezési feladatban?

Feladat:
Henger alakú üvegbe 0,75 liter folyadék van. Hány db üvegre van szükség, ha egy 50 cm-es élű kocka térfogatát akarjuk beleönteni az üvegbe?

Képletek:
Henger térfogata: r a másodikon szorozva 3,14 szorozva magasság
Kocka felszíne: 6 szorozva "a" a másodikon
Négyzet térfogata: "a" a másodikon
Négyzet kerülete: 4 szorozva a

3. ábra – forrása: [3]

Kapott választ kérdésére, melyben tájékoztatták: „A négyzetnek nincs térfogata.” Sajnos sokszor a megoldandó feladat leírása sem megy. Erre mutat példát a 4. ábra.

Matematikai feladatban valaki segíteni?

kérlek szépen segítsetek matek feladat.
<an> liman=?
a5=?
E-0.02-hoz szigoruan..
Valaki tudna segíteni kérem szépen?? :///

4. ábra – forrása: [4]

Ők a feladatukat másokkal akarják megoldatni, de rögtön. Vannak olyan helyek is, ahol felkínálják, hogy potom pénzért megoldják mások feladatait. Bizonyára erre is van keres - let. Miközben itt mi saját képletek előállítására buzdítunk. Hát nem fura?

M7. Az 1. ábrán látható képletet lelőhelyén levezetés nélkül közölték. Már többször fel - hívtuk rá a figyelmet, hogy hacsak lehetséges ez, utána kell járni, hogy a talált képletek nem hibásak - e. Itt ezt megtettük.

Források:

[1] –

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%B0#cite_ref-1

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[3] – https://www.gyakorikerdesek.hu/kozoktatas-tanfolyamok_hazifeladat-kerdesek_10121566-tudnatok-nekem-segiteni-ebben-a-matematikai-algebrai-kifejezesi-feladatban

[4] – https://www.gyakorikerdesek.hu/kozoktatas-tanfolyamok_hazifeladat-kerdesek_5356891-matematikai-feladatban-valaki-segiteni

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2019. 11. 07.